Sisteme de numerație

Organizarea oricărui computer depinde considerabil de reprezentarea numerelor şi caracterelor. În continuare se vor prezenta modurile în care calculatorul memorează şi manipulează caractere şi informații.

Unitatea de bază de memorare a informație se numeşte *bit* (contragere de la Binary Digit, în traducere cifră binară). Concret, bitul nu este decât starea de „închis”-„deschis” sau „sus”-„jos” dintr-un circuit.

Noțiunea de bit a fost utilizată pentru prima dată în teza de doctorat a matematicianului Claude Shannon, care a „inventat” prin teza sa un nou domeniu numit teoria informației.

În 1964 proiectanții calculatorului mainframe IBM System/360 au stabilit ca şi convenție folosirea grupurilor de 8 biți ca unitate de bază a memoriei calculatorului. Astfel a apărut octetul (o) sau byte-ul (B).

Un cuvânt este format din doi sau mai mulți octeți adiacenți adresați şi manipulați împreună. Mărimea cuvântului reprezintă mărimea datelor care sunt optim manevrate de către o anumită arhitectură. Cuvinteşe pot fi succesiuni de 16, 32, 64 de biți. O succesiune de 4 biți (jumătate de octet) se numeşte *nibble*.

Definiția 1:

Un sistem de numerație este format din totalitatea regulilor de reprezentare a numerelor cu ajutorul unor simboluri numite cifre.

Definiția 2:

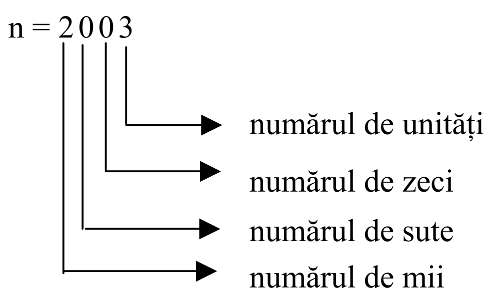
Se numeşte baza sistemului de numerație numărul total de cifre distincte utilizate într-un sistem de numerație.

Baza sistemului de numerație se notează cu b şi satisface condiția b>1. Numerele pot fi reprezentate în baza b folosindu-se cifrele cuprinse în intervalul [0, b-1].

Definiția 3:

Un sistem de numerație se numeşte pozițional, dacă valoarea unei cifre este dată de poziția pe care aceasta o ocupă în cadrul numărului.

Exemplu: Considerăm numărul 2003 scris în baza 10.



Se observă că, în funcție de poziția pe care o ocupă, cifra 0 are valori diferite.

Datele sunt reprezentate în computer numai în sistem binar, sistemele octal şi hexazecimal fiind notații folosite de către programatori pentru scurtarea notațiilor prea lungi care ar rezulta în cazul reprezentării în binar a numerelor mari.

2.2 Algoritmi de conversie

Conversia numerelor întregi din baza 10 în baza b

Fie x $\in$**Z+**. Dacă $x<b$, atunci $x_{10} = x_b$, iar dacă $x \geq b$, trecerea de la baza 10 la baza b se face astfel:

Conform teoremei împărțirii cu rest a numerelor întregi, putem scrie şirul de egalități:

$$\begin{array}{ll} x=bq_0+r_0 & 0\leq r_0<b \\ qo=bq_1+r_1 & 0\leq r_1<b \\ \ldots & \ldots \\ q_{k-1}=bq_k+r_k & 0\leq r_k<b \end{array}$$

oprindu-ne la acel k pentru care $q_k=0$. În acest caz avem:

$$x_{10}=(r_k r_{k-1}......r_1 r_0)_b.$$

Algoritmul de conversie presupune împărțirea numărului la baza b. Se obține un rezultat format din cât şi rest. Noul cât se împarte din nou la bază. Algoritmul continuă până când se obține câtul 0. Resturile obținute, scrise în ordine inversă, reprezintă numărul inițial convertit în baza b.

Problemă. Să se convertească numărul x=843 din baza 10 în bazele 2,8 şi 16.

Soluție. Vom avea:

a)b=2

$$\begin{array}{l} 843=2\cdot 421+1 \\ 421=2\cdot 210+1 \\ 210 =105+0 \\ 105=2\cdot 52+1 \\ 52=2\cdot 26+0 \\ 26=2\cdot 13+0 \\ 13=2\cdot 6+1 \\ 6=2\cdot 3+0 \\ 3=2\cdot 1+1 \\ 1=2\cdot 0+1 \end{array}$$

b) b=8.

$$\begin{array}{r} 843=8\cdot 105+3 \\ 105=8\cdot 13+1 \\ 13=8\cdot 1+5 \\ 1=8\cdot 0+1 \end{array}$$

c) b=16.

$$\begin{array}{r} 843=16\cdot 52+11 \\ 52=16\cdot 3+4 \\ 3=16\cdot 0+3 \end{array}$$

şi deci:

$$843_{10}=\begin{cases} 1101001011_2 \\ 1513_8 \\ 34B_{16} \end{cases}$$

Conversia numerelor subunitare din baza 10 în baza b

Fie $y \in (0,1)$. Conversia lui y din baza 10 în baza b se face prin înmulțiri succesive cu baza, separând partea întreagă rezultată, după cum urmează:

$$\begin{array}{rlll} y\cdot b= & r_{-1}+y_1 & 0\leq r_{-1}<b & ;y_1\in(0,1) \\ y_1\cdot b= & r_{-2}+y_2 & 0\leq r_{-2}<b & ;y_2\in(0,1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-1}\cdot b= & r_{-m}+y_m & 0\leq r_{-m}<b & ;y_m\in(0,1) \end{array}$$

Procedeul are în general un număr infinit de paşi, totuşi în practică se face conversia luând în considerare un număr finit de paşi, în funcție de gradul de precizie ales (numărul de înmulțiri).

Exemplul 1:

Să se convertească numărul 0.375 din baza 10 în bazele 2, 8, respectiv 16.

$$\begin{array}{l|l} 0.375 \cdot 2 = & \mathbf{0}.750 \\ 0.750 \cdot 2 = & \mathbf{1}.500 \\ 0.500 \cdot 2 = & \mathbf{1} \end{array} \downarrow \qquad 0.375 \cdot 8 = \ \mathbf{3}.000 \qquad 0.375 \cdot 16 = \ \mathbf{6}.000$$

$0.375_{(10)} = 0.011_{(2)}$ $\quad$ $0.375_{(10)} = 0.3_{(8)}$ $\quad$ $0.375_{(10)} = 0.6_{(16)}$

Exemplul 2. Să se convertească numărul y=0,273 din baza 10 în bazele 2, 8, respectiv 16.
Pentru baza 2 se va realiza conversia cu gradul de precizie 9, iar pentru bazele 8,16 gradl de precizie este 3.

a) b=2.
$$\begin{array}{r|l} 0,273 \cdot 2= & 0,546 \\ 0,546 \cdot 2= & 1,092 \\ 0,092 \cdot 2= & 0,184 \\ 0,184 \cdot 2= & 0,368 \\ 0,368 \cdot 2= & 0,736 \\ 0,736 \cdot 2= & 1,472 \\ 0,472 \cdot 2= & 0,944 \\ 0,944 \cdot 2= & 1,888 \\ 0,888 \cdot 2= & 1,776 \end{array} \downarrow$$

b) b=8.
$$\begin{array}{r|l} 0,273 \cdot 8= & 2,184 \\ 0,184 \cdot 8= & 1,472 \\ 0,472 \cdot 8= & 3,776 \end{array} \downarrow$$

c) c=16.
$$\begin{array}{r|l} 0,273 \cdot 16= & 4,368 \\ 0,368 \cdot 16= & 5,888 \\ 0,888 \cdot 16= & 14,208 \end{array} \downarrow$$

şi deci:

$$0,273_{10} = \begin{cases} 0,010001011_2 \\ 0,2136_8 \\ 0,45E_{16} \end{cases}$$

Conversia numerelor reale din baza 10 în baza b

Fie z∈**R+**. Numărul z se poate exprima în mod unic sub forma : z=[z]+{z},unde prin [z]şi {z} am exprimat partea întreagă şi, respectiv, partea fracţionară a numărului z. Pentru a realiza conversia lui z din baza 10 în baza b se parcurg următoarele etape:

I) se realizează conversia părţii întregi conform algoritmului de conversie a numerelor întregi din baza 10 în baza b;
II) se realizează conversia părţii fracţionare conform algoritmului de conversie a numerelor subunitare din baza 10 în baza b;
III) se concatenează cele două rezultate, plasând virgula între ultima cifră rezultată în urma conversiei părţii întregi şi prima cifră rezultată în urma conversiei părţii fracţionare.

Exemplu: Să se convertească numărul 843,375 în bazele 2,8 respectiv 16.
Conform rezultatelor obţinute avem:
$843,375_{(10)} = 1101001011,011_{(2)}$
$843,375_{(10)} = 1513,3_{(8)}$
$843,375_{(10)} = 34B,6_{(16)}$

Conversia numerelor reale din baza b în baza 10

Pentru a realiza conversia unui număr real din baza 10,se procedează astfel:

I) se trece de la reprezentarea poziţională a numărului în baza b la reprezentarea algebrică în baza b;
II) se exprimă cifrele numărului şi exponenţii care apar în reprezentarea algebrică prin cifre sau numere în baza 10;

III) se efectuează calculele în baza 10 şi se obţine tocmai reprezentarea poziţională a numărului în baza 10.

Exemplu: Să se convertească în baza 10 numerele:

a) $10101,0110_{(2)}$

b) $257,115_{(8)}$

c) $1EF,24B_{(16)}$

$2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 \ 2^{-1} 2^{-2} 2^{-}$

1 0 1 0 1 , 0 1 1 0 $= 1*2^0+0*2^1+1*2^2+0*2^3+1*2^4+0*2^{-1}+1*2^{-2}+1*2^{-3}+0*2^{-4}=2+4+16+$
$+ 1/4+1/8=(22*8+2+1)/8 =22,375$

2 5 7 , 1 1 5 $= 2*8^2+5*8^1+7*8^0+1*8^{-1}+1*8^{-2}+5*8^{-3} = 128+40+7+1/8+1/64+1/512 =$
$= (89600+64+8+5)/512 =175,150390$

1 E F , 2 4 B $= 1*16^2+E*16^1+F*16^0+2*16^{-1}+4*16^{-2}+B*16^{-3} = 256 + 14*16 + 15 + 2/16$
$+$
$+ 4/256 + 11/4096 = 495,14331$

Conversii din binar în octal şi hexazecimal

Pentru a putea realiza aceste conversii se prezintă următorul tabel:

Zecimal	**Binar**	**Octal**	**Hexazecimal**
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Conversii binar – octal

Conversia în octal se face astfel: cifrele de la partea întreagă se împart în grupe de câte trei de la dreapta la stânga, iar cifrele de la partea fracţionară se împart în grupe de câte trei de la stânga la dreapta (prima grupă de la partea întreagă şi ultima grupă de la partea fracționară se completează în față, respectiv în spate, cu unul sau două zerouri) şi apoi fiecare grupă de trei cifre binare se înlocuieşte cu cifra octală corespunzătoare ei.

Invers, dacă numărul este scris în octal, conversia în binar se face înlocuind fiecare cifră octală cu grupul de trei cifre binare corespunzătoare ei.

Exemplu:

1110010101 = 001.110.010.101 = $1625_{(8)}$

Conversii binar – hexazecimal

În acest caz conversia se face la fel ca în cazul precedent, cu precizarea că se vor lua în considerare grupe de câte 4 cifre.

Exemplu:

1110011101 = 0011.1001.1101 =$39D_{(16)}$

Operații aritmetice în binar

Tabla adunării în binar este următoarea:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Notă: 1+1 = 2 (10 în binar).

Operații aritmetice în hexazecimal:

La adunarea în hexa se ține cont că baza de referință este 16. Se va trece astfel ca rezultat intermediar numărul ce depăşeşte baza şi se va transporta unitatea (sau unitățile) către stânga.

La scădere se va ține cont, în cazul unei scăderi intermediare cu rezultat negativ, că la descăzut se adună 16 (spre deosebire de 10 în baza 10) şi se va transporta unitatea ce trebuie scăzută spre stânga.

Probleme rezolvate:

```
 1100+
 0111
 1000
______
 11011
```

Explicație:
0+1+0 = 1
0+1+0 = 1
1+1+0 = 10 (se scrie 1, 1 mai departe)
1+0+1 = 10 + 1 = 11

```
 1111+
 1001
 0110
______
 11110
```

Explicație:
1+1+0 = 10 (se scrie 0,1 mai departe)
1+0+1 = 10+1 = 11 (se scrie 1, 1 mai departe)
1+0+1 = 10+1 = 11 (se scrie 1, 1 mai departe)
1+1+0 = 10+1 = 11

Tabla scăderii în binar:

-	0	1
0	0	Imposibil*
1	1	0

*Notă: 0-1 este imposibil în binar dar se trece 1 şi se împrumută o unitate din stânga.

```
 1010-
 0111
______
 0011
```

Explicație:
0 – 1 = 1 (se împrumută o unitate din stânga)
(1-1) - 1= 0 –1 = 1 (se împrumută o unitate din stânga)
(0-1) – 1 =1-1 (se împrumută o unitate din stânga)
(1-1) –0 = 0

```
 1111-
 0111
 0100
______
 0100
```

Explicație:
1 - 1 – 0 = 0
1 – 1 – 0 = 0
1 – 1 – 1 = 0 – 1 = 1 (se împrumută o unitate din stânga)
(1 – 1) –0 – 0 = 0

```
 1A +
 4B
_____
 65
```

A+B = 10+11 = 5 (1 mai departe)
1+4 = 5 + 1 = 6

```
 FF +
 1E
_____
 11C
```

F + E = 15 +14 = 29 – 16= C (1 mai departe)
F + 1 = 15 +1 = 16 = 10_{16} + 1=11

FF +
1E
47
―――
164

F + E +7 =36 –2*16=4 (2 mai departe)
F +1 +4 = 14+2 = 16

1A-
C
―――
C

A – C = (16 + A) – C = C (se împrumută o unitate din stânga)
1-1 = 0

28EF-
11FA
―――
16F5

F – A = 5
E – F = (E + 16) – F = F (se împrumută a unitate din stânga)
8 – 1 –1 = 6
2 –1 = 1

Probleme propuse

1. Definiți bitul.
2. Ce este byte-ul?
3. Ce este cuvântul?
4. Din punct de vedere al reprezentării numerelor, ce sistem de numerație este preferabil de utilizat?
5. Ce reprezintă gradul de precizie în cazul algoritmului de conversie a numerelor subunitare din baza 10 în baza b?
6. Când se încheie algoritmul de conversie a numerelor întregi din baza 10 în baza b?
7. Realizați conversia numerelor 40, 272, 18, 94 în bazele 2, 8, respectiv 16.
8. Realizați conversia numerelor 0,824; 0. 029; 0,456; 0,613 în bazele 2, 8, respectiv 16.
9. Realizați conversia numărului 110110011 în bazele 10, 8, 16.
10. Efectuați următoarele operații:

1011+	1010+	1101+	1110 -	10000 -	11111 -
0111	0101	1001	0111	00111	11010
		0111		01000	00011

45 +	10 +	8A2 +	1F -	1A2 -	AFFE -
1F	1E	194	E	DB	4C8F
		CF1			